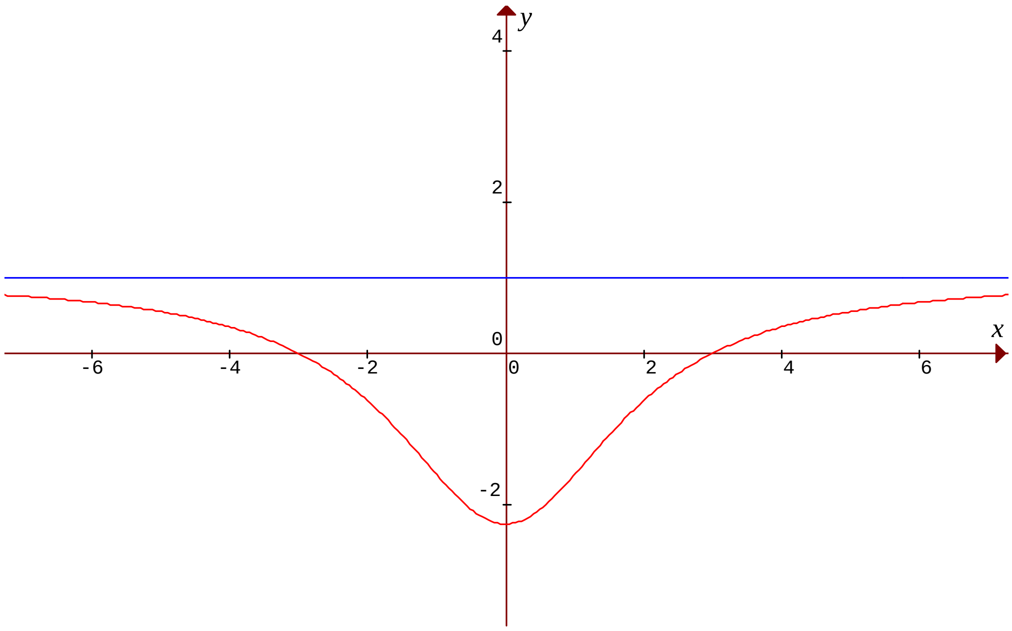


STUDIO DI FUNZIONE: razionale frazionaria

$y = f(x)$	$y = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 4}$
Campo di Esistenza	$\mathrm{CDE} = \{\forall x \in R\}$
Eventuali intersezioni con gli assi coordinati	intersezioni con l'asse x : $(-3,0)$; $(3,0)$ intersezione con l'asse y : $\left(0,-\dfrac{9}{4}\right)$
segno della funzione	la funzione è positiva in : $x < -3$, $x > 3$
comportamento agli estremi del dominio	$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 4} = +1^-$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 9}{x^2 + 4} = +1^-$
eventuali asintoti	asintoti verticali: nessuno asintoti orizzontali: $y = 1$ asintoti obliqui: nessuno
derivate	$y' = \dfrac{26x}{(x^2+4)^2}$ $y'' = \dfrac{26(-3x^2+4)}{(x^2+4)^3}$
monotonia	la funzione è decrescente nell'intervallo in cui : $x < 0$ la funzione è crescente nell'intervallo in cui : $x > 0$
eventuali massimi e minimi relativi	minimo : $\left(0,-\dfrac{9}{4}\right)$ massimo : nessuno
concavità e convessità	la funzione presenta la concavità verso l'alto in : $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ la funzione presenta la concavità verso il basso in : $x < -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$, $x > \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
eventuali punti di flesso	punti di flesso : $\left(-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{23}{16}\right)$; $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3}, -\dfrac{23}{16}\right)$
grafico	

STUDIO DI FUNZIONE: razionale frazionaria

$$y=\frac{x^2-9}{x^2+4}$$

Campo di Esistenza

$y=\dfrac{x^2-9}{x^2+4}$ è una funzione razionale fratta, perciò basterà imporre che il denominatore non sia nullo:

$x^2+4\neq 0 \Rightarrow x^2\neq -4$.

Questo si verifica sempre nel campo dei numeri Reali, quindi il CDE della funzione è costituito dall'intero asse Reale:

$\mathrm{CDE}=\{\forall x\in R\}$.

Intersezioni con gli assi coordinati

Intersezione con l'asse x:

$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-9}{x^2+4} \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x^2+4}=0 \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x^2-9=0 \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x^2=9 \\ y=0 \end{cases},\quad \begin{cases} x=\pm 3 \\ y=0 \end{cases}$$

I due punti in cui la curva interseca l'asse x sono: $(-3,0)$; $(3,0)$

Intersezione con l'asse y:

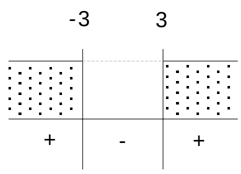
$$\begin{cases} y=\dfrac{x^2-9}{x^2+4} \\ x=0 \end{cases},\quad \begin{cases} y=\dfrac{0-9}{0+4} \\ x=0 \end{cases}$$

Il punto in cui la curva interseca l'asse y è : $\left(0,-\dfrac{9}{4}\right)$

Segno della funzione

Studiamo in quali intervalli la funzione è positiva, ovvero in quali regioni del CDE la funzione si dispone sopra l'asse delle ascisse:

$$\frac{x^2-9}{x^2+4}>0\ ,\quad \begin{matrix} \mathrm{N}>0 & x^2-9>0 & x^2>9 & x<-3, x>3 \\ \mathrm{D}>0 & x^2+4>0 & \text{sempre vero} & \forall x \end{matrix}$$



La funzione risulta positiva per valori $x<-3$, $x>3$.

Studio coi limiti del comportamento della funzione agli estremi del dominio.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9}{x^2+4}=\frac{\infty}{\infty}$$

la forma di indeterminazione si elimina confrontando gli ordini di infinito del numeratore e del denominatore.

La funzione, quando x tende ad ∞ , tende al valore 1.

Un altro metodo di calcolo consiste nel raccogliere al numeratore e al denominatore la stessa quantità:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-9}{x^2+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\dfrac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)}=$$

ora semplificando per x^2 e notando che il $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9}{x^2}=0$ e il $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2}=0$,

si ottiene: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-9}{x^2+4}=1^-$.

In modo analogo si procede per l'altro limite, ottenendo $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-9}{x^2+4}=1^-$.

Asintoti orizzontali

Dal calcolo del limite $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-9}{x^2+4}=1$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-9}{x^2+4}=1$, si deduce che la funzione tende al valore 1.

La retta $y=1$ è un asintoto orizzontale.

Calcolo delle derivate

$$y'=\frac{2x\left(x^2+4\right)-2x\left(x^2-9\right)}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+4-x^2+9\right)}{\left(x^2+4\right)^2}=\frac{26x}{\left(x^2+4\right)^2}$$

$$y''=\frac{26\left(x^2+4\right)^2-26x(2)\left(x^2+4\right)(2x)}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{26\left(x^2+4\right)\left(x^2+4-4x^2\right)}{\left(x^2+4\right)^4}=\frac{26\left(-3x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^3}$$

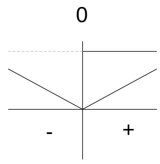
Ricerca di eventuali punti di massimo o minimo relativi

$$y'=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{26x}{\left(x^2+4\right)^2}=0 \quad 26x=0 \quad x=0 .$$

Il punto di ascissa $x=0$ è un probabile punto di massimo o minimo.

Studio della monotonia

$$y'>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{26x}{\left(x^2+4\right)^2}>0 \qquad \begin{array}{lll} \mathrm{N}>0 & 26x>0 & x>0 \\ \mathrm{D}>0 & \left(x^2+4\right)^2>0 & \text{sempre vero} \end{array}$$



quindi la curva risulta crescente per valori di x positivi, mentre risulta decrescente per valori negativi di x.
Inoltre possiamo affermare che il punto di ascissa $x=0$ è un punto di minimo per la funzione.
Calcoliamo ora l'ordinata di tale punto sostituendo il valore dell'ascissa nella funzione:

$$y=\frac{x^2-9}{x^2+4}=-\frac{9}{4} .$$

In conclusione il punto di coordinate $\left(0,-\frac{9}{4}\right)$ è un punto di minimo relativo.

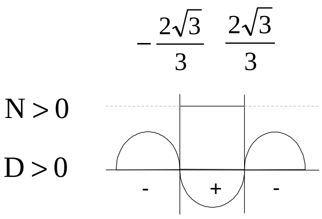
Ricerca di eventuali punti di flesso

$$y''=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{26\left(-3x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^3}=0 \quad , \quad -3x^2+4=0 \quad , \quad -3x^2=-4 \quad , \quad x^2=\frac{4}{3} \quad , \quad x=\pm\frac{2}{\sqrt{3}} ,$$

da cui razionalizzando otteniamo le ascisse dei due probabili punti di flesso $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Studio della concavità

$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{26\left(-3x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^3}>0 \qquad \begin{array}{lllll} \mathrm{N}>0 & -3x^2+4>0 & -3x^2>-4 & 3x^2<4 & x^2<\frac{4}{3} \quad -\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<+\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \mathrm{D}>0 & \left(x^2+4\right)^3>0 & x^2+4>0 & \text{sempre vero} & \end{array}$$



La curva quindi presenta la concavità verso l'alto in : $-\frac{2\sqrt{3}}{3}<x<\frac{2\sqrt{3}}{3}$,

mentre presenta la concavità verso il basso in : $x<-\frac{2\sqrt{3}}{3}, x>\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Calcoliamo ora le ordinate dei punti di flesso sostituendo i valori ottenuti nella funzione:

$$y=\frac{x^2-9}{x^2+4}=\frac{\frac{4}{3}-9}{\frac{4}{3}+4}=\frac{\frac{4-27}{3}}{\frac{4+12}{3}}=-\frac{23}{16} .$$

Per cui i punti di flesso hanno coordinate $\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{23}{16}\right);\left(\frac{2\sqrt{3}}{3},-\frac{23}{16}\right)$.